

ترکیبیات

کلیدواژه‌ها: ترکیبیات، مهره متمایز و غیر متمایز، معادله سیاله، اعداد استرلینگ

مقدمه

جهان ریاضیات، جلوه‌گاه تلاش آدمی برای دست یافتن به دنیایی زیباتر و پرشکوه‌تر است. چه آن زمان که انسان‌های دوران دیرینه سنگی، با نقاشی‌های خود بر دیواره غارها، اولین تصورات ما را از عدد شکل می‌دادند و به زندگی غنا می‌بخشیدند، و چه زمانی که انسان‌های دوران نوسنگی، سرانجام به سرگردانی و خانه‌به‌دوشی پایان دادند و دهکده‌ها را پدید آوردند و مفهوم عدد را توسعه بخشیدند. و چه امروز؛ همه می‌کوشیدند و می‌کوشند تا جهانی نو را برپا دارند.

یکی از مسائل بسیار مهم در ریاضیات گسسته، دوره پیش‌دانشگاهی، بحث ترکیبیات است؛ به‌ویژه مسئله انتخاب تعداد r نوع گل از n نوع گل، به شرط آنکه تکرار هم جایز باشد، و معادل بودن آن با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$.

بنابر تجارب خود در تدریس این کتاب و مبحث یاد شده، به نظرم رسید که این مسئله و سؤالاتی از این دست را به روش زیر و به‌گونه‌ای خوش‌فهم بیان کنم. امید که مورد قبول واقع شود.



فرزاد حمزه‌پور*
دبیر ریاضی از استان
کردستان، شهرستان بانه

مسائل تخصیص

• قراردادن r مهره در n جعبه متمایز

n جعبه در اختیار داریم و می‌خواهیم r مهره را داخل آن‌ها قرار دهیم. بسته به اینکه مهره‌ها متمایز باشند یا خیر و قراردادن بیش از یک مهره در داخل یک جعبه مجاز باشد یا خیر، چهار حالت داریم:

الف. مهره‌ها متمایز و تکرار مجاز:

قراردادن مهره شماره $۱: n$ حالت

قراردادن مهره شماره $۲: n$ حالت

...

قراردادن مهره شماره $r: n$ حالت

طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با: n^r

ب. مهره‌ها متمایز و تکرار غیر مجاز:

قراردادن مهره شماره $۱: n$ حالت

قراردادن مهره شماره $۲: n-۱$ حالت

...

قراردادن مهره شماره $r: n-(r-۱)$ حالت

طبق اصل ضرب، این اعمال یکی پس از دیگری به حاصل ضرب این حالات انجام‌پذیر است که برابر است با:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-۱)(n-۲)\dots(n-(r-۱)) = \text{کل حالات}$$

پ. مهره‌ها غیر متمایز و تکرار هم غیر مجاز:

$$\frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!} = \binom{n}{r}$$

ت. مهره‌ها غیر متمایز و تکرار مجاز باشد:

$$\binom{n-۱+r}{n-۱}$$

یکی از مسائل
بسیار مهم
در ریاضیات
گسسته، دوره
پیش دانشگاهی،
بحث ترکیبیات
است؛ به ویژه
مسئله انتخاب
تعداد r نوع گل از
 n نوع گل



اثبات

برای درک کامل این مورد، ابتدا به روش زیر عمل می‌کنیم، سؤالات دیگری را مطرح می‌کنیم و سپس از روی آن‌ها به اثبات مورد (ت) می‌پردازیم:

هر کدام از این حالات یکی از جواب‌های ماست و به نظر می‌رسد که تعداد r مهره غیر متمایز با $(n-1)$ چوب خط غیر متمایز در هر حالت با هم به صورت زیر در حال جایگشت هستند:

$$\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_r \quad \underbrace{||| \dots |||}_{n-1}$$

طبق سؤال دوم، تعداد کل حالات برابر است با:

$$\binom{n-1+r}{n-1} = \binom{n-1+r}{r} \quad \text{که این فرمول با } \frac{(r+(n-1))!}{r! \times (n-1)!}$$

برابر است.

● **تمرین:** r مهره غیر متمایز داریم. به چند طریق می‌توان این مهره‌ها را در n جعبه قرار داد، به طوری که هیچ یک از جعبه‌ها خالی نباشد ($r \geq n$).

● **حل:** n مهره برمی‌داریم و در داخل n جعبه قرار می‌دهیم تا هیچ یک خالی نباشد و قرار دادن $r-n$ مهره غیر متمایز در n جعبه تکرار مجاز باشد.

$$\binom{n-1+r-n}{n-1} = \binom{r-1}{n-1}$$

$$\text{تعداد کل حالات} = \binom{r-1}{n-1} \times 1 = \binom{r-1}{n-1}$$

● **سؤال اول:** به چند طریق می‌توان n مهره سفید متمایز و m مهره سیاه متمایز دیگر را کنار هم چید؟
● **حل:** طبق جایگشت‌های متمایز به $(n+m)!$ طریق میسر است.

● **سؤال دوم:** به چند طریق می‌توان n مهره سفید غیر متمایز و m مهره سیاه غیر متمایز دیگر را کنار هم چید؟
● **حل:** طبق جایگشت‌های متمایز به $\frac{(n+m)!}{m! \times n!}$ طریق میسر است.

● **سؤال سوم:** به چند طریق می‌توان r مهره غیر متمایز را در n جعبه متمایز قرار داد، در صورتی که تکرار مجاز نباشد؟
● **حل:** با توجه به جدول زیر داریم:

۱	۲	...	n
$\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_r$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{r-1}$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
	$\underbrace{\circ \circ \dots \circ}_{r-\delta}$	$\circ$	$\circ \dots \circ$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$

تعداد جواب‌های معادله سیاله

تعداد کل جواب‌های صحیح و نامنفی معادله:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = r$$

طبق مطالب قبلی، $r = \underbrace{1+1+\dots+1}_r$ برابر است با $\binom{n-1+r}{n-1}$ و تعداد جواب‌های صحیح و مثبت: $\binom{r-1}{n-1}$.

● **تمرین:** به چند طریق می‌توان r مهره متمایز را:

الف. در ۲ جعبه متمایز

ب. در ۳ جعبه متمایز

پ. در n جعبه متمایز

قرار داد، به طوری که هیچ‌یک از جعبه‌ها خالی نباشد.

● **حل:** الف. تعداد کل: 2^r

تعداد حالاتی که جعبه‌ها خالی باشد: ۲ حالت، لذا $2^n - 2$ تعداد حالات مسئله

ب. تعداد کل حالات: 3^r

(i) دو تا خالی: ۳ حالت

(ii) یکی خالی: هر جعبه خالی ۳ حالت و برای

هر حالت $2^r - 2$

تعداد حالات مسئله $3^r - (3(2^r - 2) + 3)$

پ (پ $\binom{n}{n-1} 1^r + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{1} 1^r$)
 $n!s(r, n) = n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} 1^r$
 (اعداد استرلینگ نوع دوم)

● **تمرین:** ضریب $a^x b^y c^z d^w$ در بسط: $(a+b+c+d+e)^{20}$

را بیابید.

● **جواب:** $\frac{20!}{4!3!7!6!}$

● **نکته:** تعداد جملات بسط $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^r$ برابر است

$$\binom{n-1+r}{n-1} \text{ با:}$$

● **مثال:** ضریب جمله $a^x b^y c^z d^w$ در عبارت

$(2a - 3b + 2c - d)^{12}$ کدام است؟

$2a=A, -3b=B, 2c=C, -d=D$

ضریب $A^x B^y C^z D^w$ برابر است با: $\frac{12!}{2!3!3!4!}$

$A^x B^y C^z D^w = \frac{12!}{2!3!3!4!} (2a)^x (-3b)^y (2c)^z (-d)^w$ جواب مسئله

و ضریب جمله برابر است با: $\frac{12! \times 2^x \times (-2)^y \times 8}{2!3!3!4!}$

جایگشت‌های تعمیم یافته

n شیء داریم که الزاماً متمایز نیستند و از k دسته غیرتهی تشکیل شده‌اند؛ به طوری که تمام اشیاء یک دسته یکسان هستند و در دسته i به تعداد n_i شیء قرار دارد.

در حالتی که اشیای دسته‌های متفاوت متمایز باشند، تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر است با:

$$p(n, n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

اگر مجموع اشیای $(k-1)$ دسته اول از k دسته مذکور برابر r باشد ($r \leq n$) و $n_k = n-r$ در این صورت:

$$p(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{p(n, r)}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

● **تعریف:** اگر $k, n_i, i=1, 2, \dots, k$ عدد طبیعی باشند که مجموع آن‌ها r باشد ($r \leq n$):

$$p(n; n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{p(n, r)}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

● **مثال:** یک پارکینگ یک ردیفه برای خودروهای تولید شده در کارخانه، ۸۰ جای پارک دارد. می‌خواهیم ۱۵ خودروی سواری، ۲۵ جیپ و ۳۰ وانت را در این پارکینگ قرار دهیم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟ $r = 15 + 25 + 30 = 70$

$$p(80, 15, 25, 30) = \frac{p(80, 70)}{15! 25! 30!}$$

در پایان

این مقاله به قصد ایجاد انگیزه و نگرشی تازه به بحث ترکیبیات و چگونگی برخورد با مسائل متنوع آن نگارش یافته است. به نظر بنده، مباحث موجود در کتاب درسی خیلی مبهم و گنگاند و دانش‌آموزان را به درک واقعی از مسائل نمی‌رسانند و آن‌ها در هاله‌ای از ابهام می‌مانند. اثبات‌ها و مسائل مطرح شده در این مقاله، به نظر کار را برای آنان ساده می‌کند.

* منابع:

۱. بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۸). مباحثی در ریاضیات گسسته. مبتکران. تهران. چاپ سوم.
۲. ریاضیات گسسته پیش‌دانشگاهی (۱۳۷۹). انتشارات متون درسی. تهران. چاپ ششم.
۳. بالا کریشنان. وک (۱۳۸۳). ریاضیات گسسته مقدماتی. ترجمه بیژن شمس. فاطمی. تهران. چاپ پنجم.

* farzad23h@yahoo.com